

2007 年 04 月 02 日第 12 版

曲面論のための曲線論まとめ

目 次

1	曲線の定義	2
2	曲線の長さ・弧長	3
2.1	弧長の極座標表示	4
3	曲線の曲率	6
3.1	平面曲線の曲率	7
3.2	平面曲線の曲率 (極座標)	9
3.3	空間曲線の曲率	10
4	Frenet 標構	12
5	捩率	14
6	Frenet-Serret の公式	15
6.1	Frenet-Serret の公式の導出	15
6.2	Frenet-Serret の公式を用いた空間曲線の曲率と捩率の導出	16
7	Bouquet の公式	20
8	曲線の例	21
8.1	平面曲線	21
8.1.1	・円, 楕円	21
8.1.2	・放物線	23
8.1.3	・双曲線	24
8.1.4	・懸垂線	26
8.1.5	・サイクロイド	27
8.1.6	・インボリュート	28
8.2	空間曲線	30
8.2.1	・常螺旋 (つるまき線)	30
8.2.2	・円錐螺旋	32

1 曲線の定義

直線を曲げた線を考えた場合，曲げる前の直線上の各点と曲げた後の線上の各点は1対1に対応するものと考えられる．

そこで，先ず実数 R の区間 I から空間 E^2 の部分集合への1対1連続写像

$$f(t) = (x(t), y(t)), (t \in I) \quad (1)$$

を考える．

直線の曲げ方として，切ったり折ったりせず，曲げた後の線は十分に滑らかであると考え．すなわち

$$x(t), y(t) \text{ は } C^\infty \quad (2)$$

の条件を満たすと考え．

更に，パラメータ t が変化した場合， $f(t)$ も変化するものとする．すなわち

$$\frac{df(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right) \neq 0 \quad (3)$$

の条件を満たすと考え．

(1) によって記述される $f(t)$ が (2), (3) の条件を満たすとき，この $f(t)$ を**平面曲線**という．

同様に， $f(t)$ が実数 R の区間 I から空間 E^3 の部分集合への1対1連続写像として

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)), (t \in I) \quad (4)$$

と記述され

$$x(t), y(t), z(t) \text{ は } C^\infty \quad (5)$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) \neq 0 \quad (6)$$

の条件を満たすとき，この $f(t)$ を**空間曲線**という．

平面曲線の場合でも空間曲線の場合でも (1) や (4) の t ようにパラメータを用いて表すことを**パラメータ表示**という．

また，平面曲線の条件 (2) や空間曲線の条件 (5) において C^∞ ではなく， C^r である場合は C^r 曲線とよぶ．

2 曲線の長さ・弧長

曲線 $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ において曲線上の点 $f(t_0)$ から $f(t)$ までの曲線に沿った長さを**曲線の長さ**，すなわち，**弧長**という．

閉区間 $[t_0, t]$ を

$$\Delta : t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t \quad (7)$$

と分割する．

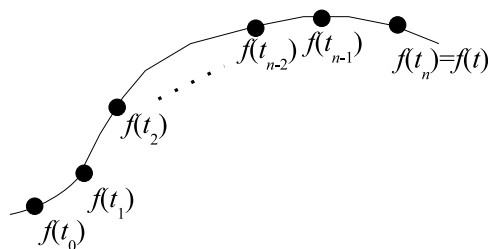


図 1: 曲線の長さ

Δ の幅を

$$d(\Delta) = \max\{t_i - t_{i-1} | i = 1, 2, \cdots, n\} \quad (8)$$

とするととき， $f(t_0)$ から $f(t)$ までの曲線の長さ，すなわち弧長は

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \quad (9)$$

と表せる．平均値の定理より

$$\begin{aligned} f(t_i) - f(t_{i-1}) &= (x(t_i) - x(t_{i-1}), y(t_i) - y(t_{i-1}), z(t_i) - z(t_{i-1})) \\ &= (\dot{x}(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \dot{y}(\eta_i)(t_i - t_{i-1}), \dot{z}(\zeta_i)(t_i - t_{i-1})) \\ &\hspace{15em} (t_{i-1} < \xi_i, \eta_i, \zeta_i < t_i) \\ &= (\dot{x}(\xi_i), \dot{y}(\eta_i), \dot{z}(\zeta_i))(t_i - t_{i-1}) \end{aligned} \quad (10)$$

故に

$$\begin{aligned} &\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \\ &= \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\eta_i)^2 + \dot{z}(\zeta_i)^2} \cdot (t_i - t_{i-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

$d(\Delta) \rightarrow 0$ のとき $(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$ すなわち $(\xi_i - \eta_i) \rightarrow 0$, $(\eta_i - \zeta_i) \rightarrow 0$ なので

$$\begin{aligned}
& \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\eta_i)^2 + \dot{z}(\zeta_i)^2} \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
&= \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\xi_i)^2 + \dot{z}(\xi_i)^2} \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
&= \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|\dot{f}(\xi_i)\| (t_i - t_{i-1}) \\
&= \int_{t_0}^t \|\dot{f}(t)\| dt
\end{aligned} \tag{12}$$

以上より, 点 $f(t_0)$ から $f(t)$ までの弧長 $s(t, t_0)$ は

$$\begin{aligned}
s(t, t_0) &= \int_{t_0}^t \|\dot{f}(t)\| dt \\
&= \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt
\end{aligned} \tag{13}$$

として記述できる.

故に弧長 $s(t, t_0)$ とパラメータ t について

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{df(t)}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{df(t)}{dt} \right)^2} \tag{14}$$

の関係が成立する.

また, 曲線の条件 (3), (6) および (14) より

$$\frac{df(t)}{dt} \neq 0 \tag{15}$$

なので

$$\frac{ds}{dt} \neq 0 \tag{16}$$

が成立する.

2.1 弧長の極座標表示

$x(t), y(t), z(t)$ と $r(t), \theta(t), \phi(t)$ の間に

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \sin \theta(t) \cos \phi(t) \\ y(t) = r(t) \sin \theta(t) \sin \phi(t) \\ z(t) = r(t) \cos \theta(t) \end{cases} \tag{17}$$

$$(0 < r(t) < \infty, 0 < \theta(t) < \pi, 0 < \phi(t) < \pi) \tag{18}$$

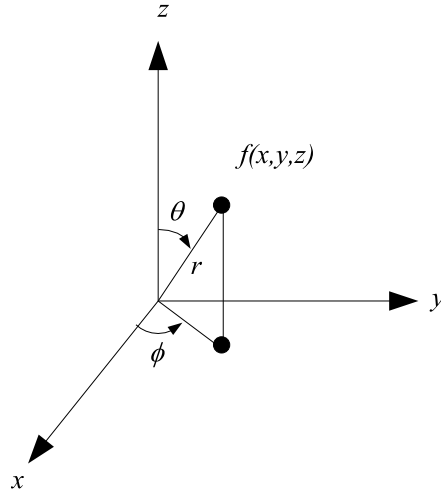


図 2: 極座標

の関係が成立する．従って

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi \\ \dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \quad (19)$$

より

$$\begin{aligned} & \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \\ = & \left(\dot{r}^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\sin^2\phi \right. \\ & + 2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi - 2r\dot{r}\dot{\phi}\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi - 2r^2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi \Big) \\ & + \left(\dot{r}^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\cos^2\phi \right. \\ & + 2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi + 2r\dot{r}\dot{\phi}\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi + 2r^2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi \Big) \\ & + \left(\dot{r}^2\cos^2\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \right) \\ = & \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta \end{aligned} \quad (20)$$

故に極座標表示の場合，弧長は (20) を (13) に代入して

$$\begin{aligned} s(t, t_0) &= \int_{t_0}^t \|\dot{f}(t)\| dt \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta} dt \end{aligned} \quad (21)$$

として求められる．

3 曲線の曲率

(6) で記述される

$$\frac{df(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) \quad (22)$$

は図3に示されるように曲線 f 上の点 $f(t)$ における接線と平行なベクトル，すなわち接ベクトルを表す．接ベクトルの長さを正規化した

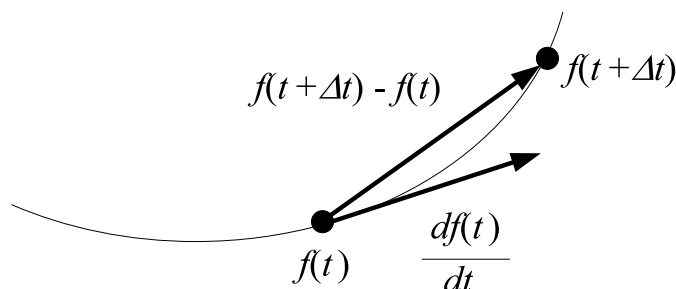


図 3: 曲線の接ベクトル

$$e_1(t) = \frac{\frac{df(t)}{dt}}{\left\| \frac{df(t)}{dt} \right\|} \quad (23)$$

を単位接ベクトルもしくは方向ベクトルという．

(23) の分子・分母に $\frac{dt}{ds}$ を乗算して

$$e_1(t) = \frac{\frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}}{\left\| \frac{df}{dt} \right\| \cdot \frac{dt}{ds}} \quad (24)$$

$$= \frac{\frac{df}{ds}}{\left\| \frac{df}{dt} \right\| \cdot \frac{dt}{ds}} \quad (25)$$

(14) より，単位接ベクトルは

$$e_1(s) = \frac{df(s)}{ds} \quad (26)$$

としても記述でき，長さ s に対する曲線 f の変化率と考えることもできる．

単位接ベクトルは曲線の接線の向きを表す単位ベクトルであるので、長さに対する単位接ベクトルの変化率

$$k(s) = \frac{de_1}{ds} \left(= \frac{d^2 f}{ds^2} \right) \quad (27)$$

を表せば、曲線の曲がり具合を表せると考えられる。この (27) で表される $k(s)$ を**曲率ベクトル**といい、曲率ベクトルの大きさ $\kappa(s) = |k(s)|$ を**曲率**という。

また、円の場合、曲率が半径の逆数となることから、曲率の逆数を**曲率半径**という。

3.1 平面曲線の曲率

平面曲線

$$f(t) = (x(t), y(t)) \quad (28)$$

の曲率 $\kappa(t)$ を求める。

(27) より、ここでは、先ず $e_1(s)$ を求め、続いて $k = \frac{de_1}{ds}$ を求め、最後にその絶対値を求めるアプローチにより曲率 $\kappa(t)$ を導出する。

単位接ベクトルの定義 (26) より

$$e_1(t) = \frac{dt}{ds} \frac{df}{dt} \quad (29)$$

(28) の両辺を微分して

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \quad (30)$$

また、(13) において $z(t) \equiv 0$ すなわち $\dot{z}(t) = 0$ とした上で、両辺を微分して

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (31)$$

すなわち

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad (32)$$

を得る。

故に平面曲線の主方向ベクトルは (30) と (32) を (29) に代入して,

$$e_1(t) = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \quad (33)$$

として求められる.

曲率ベクトルの定義 (27) より

$$k = \frac{dt}{ds} \frac{de_1}{dt} \quad (34)$$

$\frac{dt}{ds}$ は既に (32) で求められているので, $\frac{de_1}{dt}$ を求める.

(33) の両辺を t で微分して

$$\frac{de_1}{dt} = \left(\frac{\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right), \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \dot{y} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \right) \quad (35)$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) \\ &= -\frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (36)$$

(36) を (35) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= \left(\frac{\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \dot{x} \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \dot{y} \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \left(\dot{y} \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, \dot{x} \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

従って, 曲率ベクトル k は (29) に (32) と (37) を代入して

$$k = \left(\dot{y} \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}, \dot{x} \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2} \right) \quad (38)$$

故に曲率の定義 $\kappa = |k|$ より, 平面の曲率 κ は

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}} \quad (39)$$

として求められる.

さらに, x と y に

$$y = y(x) \quad (40)$$

すなわち

$$x = t, y = y(t) \quad (41)$$

の関係が与えられたならば，平面曲線の曲率 (39) は

$$\kappa(t) = \frac{\ddot{y}(t)}{(1 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}} \quad (42)$$

として簡略化できる．

3.2 平面曲線の曲率（極座標）

極座標表示で与えられた平面曲線

$$f(t) = (r(t), \phi(t)) \quad (43)$$

の曲率を求める．

(18) において， $\theta = \pi/2$ （一定）とし， z の式を無視すると

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos\phi(t) \\ y(t) = r(t)\sin\phi(t) \end{cases} \quad (44)$$

$$(0 < r(t) < \infty, 0 < \phi(t) < \pi) \quad (45)$$

両辺を t で微分して

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \end{cases} \quad (46)$$

両辺をさらに t で微分して

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r}\cos\phi - 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\ddot{\phi}\sin\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi \\ \ddot{y} = \ddot{r}\sin\phi + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r\ddot{\phi}\cos\phi - r\dot{\phi}^2\sin\phi \end{cases} \quad (47)$$

よって (46), (47) より

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \quad (48)$$

$$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = 2\dot{r}^2\dot{\phi} + r\dot{r}\ddot{\phi} - r\ddot{r} + r^2\dot{\phi}^3 \quad (49)$$

(48), (49) を (39) に代入して極座標表示の平面曲線の曲率

$$\kappa(t) = \frac{2\dot{r}^2\dot{\phi} + r\dot{r}\ddot{\phi} - r\ddot{r} + r^2\dot{\phi}^3}{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)^{3/2}} \quad (50)$$

を得る.

(50) において $\phi \equiv t$ とすると, $\dot{\phi} = 1$, $\ddot{\phi} = 0$ となるので

$$r = f(\phi) \quad \text{すなわち} \quad f(t) = (r(t), t) \quad (51)$$

で与えられた平面曲線の曲率は

$$\kappa(t) = \frac{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}}{(\dot{r}^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (52)$$

で与えられる.

3.3 空間曲線の曲率

空間曲線

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (53)$$

の曲率 $\kappa(t)$ を求める.

平面曲線の曲率の導出と同様に, 先ず $e_1(s)$ を求め, 続いて $k = \frac{de_1}{ds}$ を求め, 最後にその絶対値を求めるアプローチにより曲率 $\kappa(t)$ を導出する.

単位接ベクトルの定義 (26) より

$$e_1(t) = \frac{dt}{ds} \frac{df}{dt} \quad (54)$$

(53) の両辺を微分して

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (55)$$

また, (13) の両辺を微分して

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (56)$$

すなわち

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \quad (57)$$

を得る.

よって、空間曲線 $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ の主方向ベクトルは

$$e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (58)$$

として求められる。

(58) の両辺を t で微分して

$$\frac{de_1}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (59)$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}} 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) \\ &= -\frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (60)$$

よって

$$\frac{de_1}{dt} = \left(\frac{\ddot{x}(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \dot{x}(\dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\ddot{y}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - \dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\ddot{z}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{z}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (61)$$

したがって (57), (61) より、空間曲線の曲率ベクトル $k(t)$ は

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{de_1}{ds} \\ &= \frac{dt}{ds} \frac{de_1}{dt} \\ &= \left(\frac{\ddot{x}(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \dot{x}(\dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2}, \frac{\ddot{y}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - \dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2}, \frac{\ddot{z}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{z}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \right) \end{aligned} \quad (62)$$

空間曲線の曲率 $\kappa(t)$ は

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= |k(t)| \\ &= \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2} \\ &\quad \cdot \left(\left(\ddot{x}(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \dot{x}(\dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) \right)^2 + \left(\ddot{y}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - \dot{y}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{z}\ddot{z}) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\ddot{z}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{z}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (63)$$

として表される。

4 Frenet 標構

曲率ベクトルを正規化した

$$e_2(s) = \frac{k(s)}{\|k(s)\|} = \frac{k(s)}{\kappa(s)} \quad (64)$$

を主法線ベクトルという.

例えば平面曲線 $f(t) = (x(t), y(t))$ の主法線ベクトルは (64) に (38), (39) を代入して

$$e_2(t) = \left(\frac{-\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \quad (65)$$

として求められる.

空間曲線 $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ の主法線ベクトルは (64) に (62), (63) を代入して

$$(66)$$

として求められる.

単位接ベクトル e_1 は単位ベクトルなので

$$e_1 \cdot e_1 = 1 \quad (67)$$

両辺を弧長パラメータ s で微分して

$$\frac{de_1}{ds} \cdot e_1 = 0 \quad (68)$$

よって (27), (64) より

$$e_1 \cdot e_2 = 0 \quad (69)$$

従って e_1 と e_2 は直交するので, 単位接ベクトルと主法線ベクトルの外積で記述される単位ベクトル

$$e_3 = e_1 \times e_2 \quad (70)$$

が存在し, これを**従法線ベクトル**という.

単位接ベクトル, 主法線ベクトル, 従法線ベクトルで構成される正規直交基底 (e_1, e_2, e_3) を **Frenet 標構** (フレネー標構) もしくは**動標構**という.

また, e_2 を延長した直線を**主法線**, e_3 を延長した直線を**従法線**という.

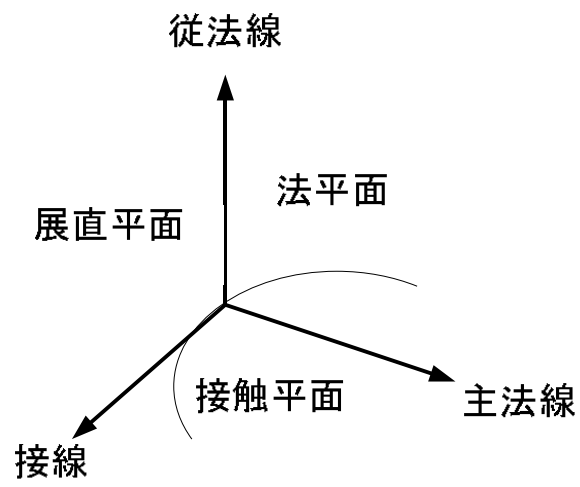


図 4: Frenet 標構により定義される平面

5 捩率

(27) , (64) より

$$\frac{de_1}{ds} = \kappa(s)e_2(s) \quad (71)$$

したがって曲率 $\kappa(s)$ は

$$\kappa(s) = \frac{de_1}{ds} \cdot e_2(s) \quad (72)$$

と記述することができる．同様に $\frac{de_2}{ds}$, e_3 を用いて

$$\tau(s) = \frac{de_2}{ds} \cdot e_3(s) \quad (73)$$

として**捩率** $\tau(s)$ が定義される．

6 Frenet-Serret の公式

6.1 Frenet-Serret の公式の導出

単位接ベクトル e_1 と同様に主法線ベクトル e_2 と従法線ベクトル e_3 も単位ベクトルなので

$$e_2 \cdot e_2 = 1 \quad (74)$$

$$e_3 \cdot e_3 = 1 \quad (75)$$

が成立する. (74), (75) をそれぞれ弧長パラメータ s にて微分して

$$\frac{de_2}{ds} \cdot e_2 = 0 \quad (76)$$

$$\frac{de_3}{ds} \cdot e_3 = 0 \quad (77)$$

また e_1, e_2, e_3 はお互いに直交するので

$$e_1 \cdot e_2 = 0 \quad (78)$$

$$e_2 \cdot e_3 = 0 \quad (79)$$

$$e_1 \cdot e_3 = 0 \quad (80)$$

これらの両辺を微分して

$$e_1 \cdot \frac{de_2}{ds} = -\frac{de_1}{ds} \cdot e_2 \quad (81)$$

$$e_2 \cdot \frac{de_3}{ds} = -\frac{de_2}{ds} \cdot e_3 \quad (82)$$

$$e_1 \cdot \frac{de_3}{ds} = -\frac{de_1}{ds} \cdot e_3 \quad (83)$$

(81) に (72) を代入して

$$e_1 \cdot \frac{de_2}{ds} = -\kappa \quad (84)$$

よって, (73), (76), (84) より

$$\frac{de_2}{ds} = -\kappa e_1 + \tau e_3 \quad (85)$$

を得る. 同様に (82) に (73) を代入して

$$e_2 \cdot \frac{de_3}{ds} = -\tau \quad (86)$$

また, (71) より

$$\frac{de_1}{ds} \cdot e_3 = 0 \quad (87)$$

なので, これを (82) に代入して

$$e_1 \cdot \frac{de_3}{ds} = 0 \quad (88)$$

よって, (77) , (86) , (88) より

$$\frac{de_3}{ds} = -\tau e_2 \quad (89)$$

を得る.

(71) , (85) , (89) をまとめた

$$\begin{cases} \frac{de_1}{ds} = & \kappa e_2 \\ \frac{de_2}{ds} = -\kappa e_1 & + \tau e_3 \\ \frac{de_3}{ds} = & -\tau e_2 \end{cases} \quad (90)$$

を **Frenet-Serret の公式** (フレネー・セレの公式, フルネ・セレの公式) という.
Frenet-Serret の公式は**曲線の構造方程式**と呼ばれることもある.

6.2 Frenet-Serret の公式を用いた空間曲線の曲率と捩率の導出

単位接ベクトルの定義 (26) より

$$e_1(t) = \frac{dt}{ds} \frac{df}{dt} \quad (91)$$

よって

$$\frac{df}{dt} = \frac{ds}{dt} e_1 \quad (92)$$

両辺を微分して

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dt^2} &= \frac{d^2 s}{dt^2} e_1 + \left(\frac{ds}{dt} \right) \frac{de_1}{dt} \\ &= \frac{d^2 s}{dt^2} e_1 + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{de_1}{ds} \end{aligned} \quad (93)$$

ここで

$$e_1 \times e_1 = 0 \quad (94)$$

$$e_1 \times e_2 = e_3 \quad (95)$$

より

$$\frac{df}{dt} \times \frac{d^2f}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \kappa e_3 \quad (96)$$

よって

$$\left\| \frac{df}{dt} \times \frac{d^2f}{dt^2} \right\| = \left\| \frac{ds}{dt} \right\|^3 \kappa \quad (97)$$

また

$$\begin{aligned} \left\| \frac{ds}{dt} \right\| &= \left\| \frac{df}{dt} e_1 \right\| \\ &= \left\| \frac{df}{dt} \right\| \end{aligned} \quad (98)$$

より

$$\kappa = \frac{\left\| \frac{df}{dt} \times \frac{d^2f}{dt^2} \right\|}{\left\| \frac{df}{dt} \right\|^3} \quad (99)$$

よって, $f(t)$ が $f(x(t), y(t), z(t))$ として表されるとき

$$\frac{df(t)}{dt} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (100)$$

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) \quad (101)$$

$$\frac{df}{dt} \times \frac{d^2f}{dt^2} = (\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y}, \dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z}, \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}) \quad (102)$$

より, 曲率 κ は

$$\kappa = \frac{\sqrt{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (103)$$

として求められる.

(93) を微分して

$$\begin{aligned}\frac{d^3 f}{dt^3} &= \frac{d^3 s}{dt^3} e_1 + \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{de_1}{dt} + 2 \frac{ds}{dt} \frac{de_1}{ds} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \frac{d^2 e_1}{ds^2} \\ &= \frac{d^3 s}{dt^3} e_1 + \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \left(\frac{ds}{dt} \right) + 2 \frac{ds}{dt} \right) \frac{de_1}{ds} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \frac{d^2 e_1}{ds^2}\end{aligned}\quad (104)$$

フレネ・セレの公式 (90) より

$$\frac{de_1}{ds} = \kappa e_2 \quad (105)$$

微分して

$$\frac{d^2 e_1}{ds^2} = \frac{d\kappa}{ds} e_2 + \kappa \frac{de_2}{ds} \quad (106)$$

フレネ・セレの公式 (90)

$$\frac{de_2}{ds} = -\kappa e_1 + \tau e_3 \quad (107)$$

を代入して

$$\begin{aligned}\frac{d^2 e_1}{ds^2} &= \frac{d\kappa}{ds} e_2 + \kappa (-\kappa e_1 + \tau e_3) \\ &= -\kappa^2 e_1 + \frac{d\kappa}{ds} e_2 + \kappa \tau e_3\end{aligned}\quad (108)$$

(105) と (108) を (104) に代入して

$$\begin{aligned}\frac{d^3 f}{dt^3} &= \frac{d^3 s}{dt^3} e_1 + \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \left(\frac{ds}{dt} \right) + 2 \frac{ds}{dt} \right) \kappa e_2 + \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \left(-\kappa^2 e_1 + \frac{d\kappa}{ds} e_2 + \kappa \tau e_3 \right) \\ &= \left(\frac{d^3 s}{dt^3} - \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \kappa^2 \right) e_1 + \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \left(\frac{ds}{dt} \right) \kappa + 2 \frac{ds}{dt} \kappa + \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \frac{d\kappa}{ds} \right) \kappa e_2 \\ &\quad + \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \kappa \tau e_3\end{aligned}\quad (109)$$

よって

$$\frac{d^3 f}{dt^3} \cdot e_3 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \kappa \tau \quad (110)$$

両辺に $\left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \kappa$ を乗じて

$$\frac{d^3 f}{dt^3} \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \kappa e_3 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^6 \kappa^2 \tau \quad (111)$$

ここで (99) より

$$\begin{aligned}
\left(\frac{ds}{dt}\right)^6 \kappa^2 &= \left\| \frac{df}{dt} e_1 \right\|^6 \kappa^2 \\
&= \left\| \frac{df}{dt} \right\|^6 \kappa^2 \\
&= \left\| \frac{df}{dt} \times \frac{d^2 f}{dt^2} \right\|^2
\end{aligned} \tag{112}$$

(111) に (96), (112) を代入して

$$\tau = \frac{\frac{d^3 f}{dt^3} \cdot \left(\frac{df}{dt} \times \frac{d^2 f}{dt^2} \right)}{\left\| \frac{df}{dt} \times \frac{d^2 f}{dt^2} \right\|^2} \tag{113}$$

よって, $f(t)$ が $f(x(t), y(t), z(t))$ として表されるとき, 振率 τ は (100) から (102) および

$$\frac{d^3 f}{dt^3} = (x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)}) \tag{114}$$

を (113) に代入して

$$\tau = \frac{x^{(3)}(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y}) + y^{(3)}(\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z}) + z^{(3)}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})}{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2} \tag{115}$$

と表すことができる.

7 Bouquet の公式

曲線 $f(s)$ を Maclaurin 展開すると

$$f(s) = f(0) + s \frac{df(0)}{ds} + \frac{s^2}{2!} \frac{d^2 f(0)}{ds^2} + \frac{s^3}{3!} \frac{d^3 f(0)}{ds^3} + O(s^3) \quad (116)$$

(26) より

$$\frac{df(0)}{ds} = e_1(0) \quad (117)$$

(27) , (64) より

$$\frac{d^2 f(0)}{ds^2} = \kappa(0) e_2(0) \quad (118)$$

(118) の両辺を s で微分して (85) を代入して

$$\frac{d^3 f(0)}{ds^3} = \frac{\kappa(0)}{ds} e_2(0) - \kappa(0)^2 e_1(0) + \kappa(0) \tau(0) e_3(0) \quad (119)$$

(117) , (118) , (119) を (116) に代入して

$$\begin{aligned} f(s) &= f(0) + s e_1(0) + \frac{s^2}{2!} \kappa(0) e_2(0) \\ &\quad + \frac{s^3}{3!} \left(\frac{\kappa(0)}{ds} e_2(0) - \kappa(0)^2 e_1(0) + \kappa(0) \tau(0) e_3(0) \right) + O(s^3) \\ &= f(0) + \left(s - \kappa(0)^2 \frac{s^3}{3!} \right) e_1(0) + \left(\kappa(0) \frac{s^2}{2!} + \frac{\kappa(0)}{ds} \frac{s^3}{3!} \right) e_2(0) \\ &\quad + \left(\kappa(0) \tau(0) \frac{s^3}{3!} \right) e_3(0) + O(s^3) \end{aligned} \quad (120)$$

この式を **Bouquet の公式** (ブーケの公式) という. Bouquet の公式は曲線の 3 次の項までを曲率と捩率で記述することができることを示している. すなわち曲線の局所的な形状は曲率と捩率であらわすことができることを示している.

8 曲線の例

8.1 平面曲線

8.1.1 ・円, 楕円

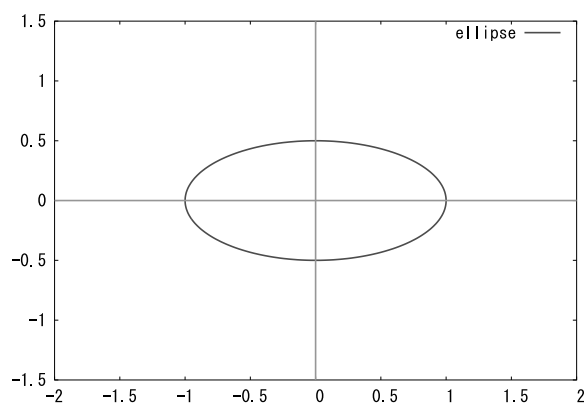


図 5: 円・楕円

a, b を正の実数とするととき, 原点 O を中心とする**楕円 (ellipse)** は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (121)$$

と記述される. これを

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (122)$$

のように表示することもできる.

(121) および (122) において $a = b$ とすれば**円 (circle)** の記述になる.

(122) より

$$\begin{cases} \dot{x} = -a \sin t \\ \dot{y} = b \cos t \end{cases} \quad (123)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a \cos t \\ \ddot{y} = -b \sin t \end{cases} \quad (124)$$

平面曲線の曲率の公式 (39) にこれらを代入することにより, 楕円の曲率は

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{(-a \sin t)(-b \sin t) - (-a \cos t)(b \cos t)}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \\
&= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{125}$$

と記述することができる.

8.1.2 ・放物線

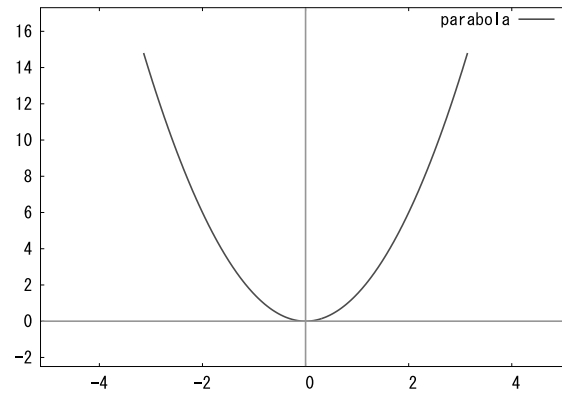


図 6: 放物線

a を正の実数とすると、**放物線 (parabola)** は

$$y = ax^2 \quad (126)$$

と記述される.

放物線の曲率は

$$\frac{dy}{dx} = 2ax \quad (127)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a \quad (128)$$

より、平面曲線の曲率の公式 (42) にこれらを代入して

$$k(x) = \frac{2a}{(1 + 4a^2x^2)^{3/2}} \quad (129)$$

として求められる.

8.1.3 ・双曲線

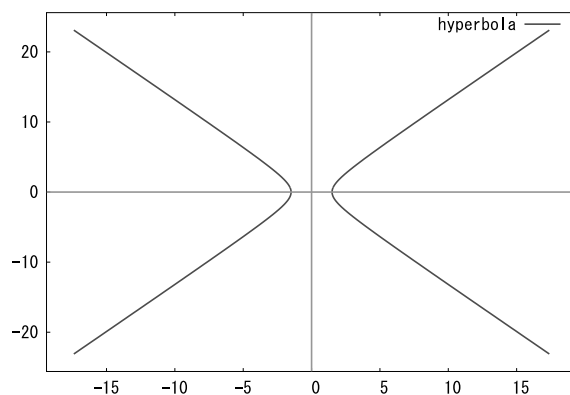


図 7: 双曲線

a, b を正の実数とするととき，原点 O を中心とする**双曲線 (hyperbola)** は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (130)$$

と記述される．これを

$$\begin{cases} x = \pm a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases} \quad (131)$$

のように表示することもできる．

$$\begin{cases} \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases} \quad (132)$$

より

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\cosh(t)) = \sinh(t) \\ \frac{d}{dt}(\sinh(t)) = \cosh(t) \end{cases} \quad (133)$$

なので

$$\begin{cases} \dot{x} = \pm a \sinh t \\ \dot{y} = b \cosh t \end{cases} \quad (134)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \pm a \cosh t \\ \ddot{y} = b \sinh t \end{cases} \quad (135)$$

よって、双曲線の曲率は平面曲線の曲率の公式 (39) にこれらを代入することにより

$$k(t) = \frac{\pm ab(\sinh^2 t - \cosh^2 t)}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{3/2}} \quad (136)$$

として求められる．ここで

$$\sinh^2 t - \cosh^2 t = -1 \quad (137)$$

より, (136) は

$$k(t) = \frac{\mp ab}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{3/2}} \quad (138)$$

と簡略化して表すことができる．

8.1.4 ・懸垂線

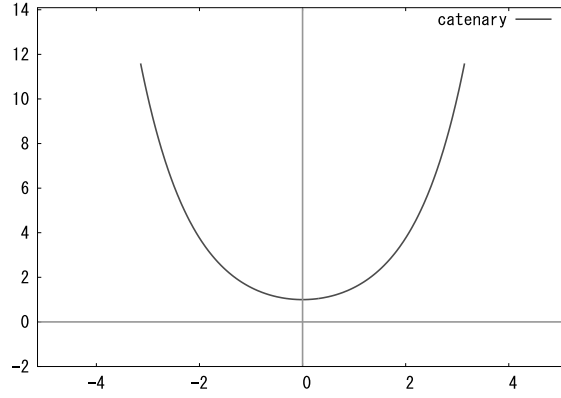


図 8: 懸垂線

a を正の実数とすると懸垂線 (catenary) は

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \quad (139)$$

のように記述される.

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{a} \quad (140)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a} \quad (141)$$

よって, 懸垂線の曲率は平面曲線の曲率の公式 (42) にこれらを代入して

$$k(x) = \frac{\frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}}{\left(1 + \sinh^2 \frac{x}{a}\right)^{3/2}} \quad (142)$$

として求められる.

8.1.5 ・サイクロイド

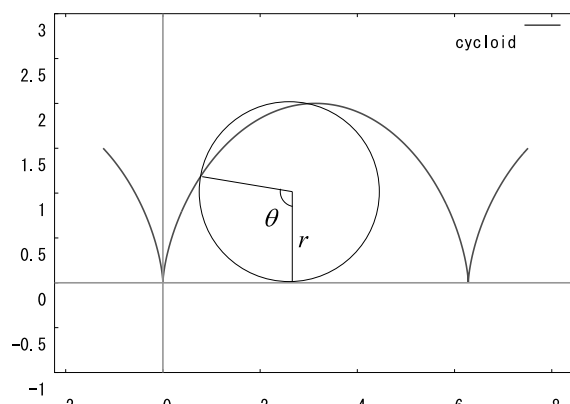


図 9: サイクロイド

直線上を半径 r の円がすべることなく転がっていくときに，円周上の定点が描く曲線を**サイクロイド (cycloid)** といい

$$\begin{cases} x = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (143)$$

として記述される．

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} = r\sin\theta \end{cases} \quad (144)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\theta^2} = r\sin\theta \\ \frac{d^2y}{d\theta^2} = r\cos\theta \end{cases} \quad (145)$$

よって，サイクロイドの曲率は平面曲線の曲率の公式 (39) にこれらを代入して

$$k(\theta) = \frac{-1}{2^{3/2}r \cdot \sqrt{1 - \cos\theta}} \quad (146)$$

として求めることができる．

8.1.6 ・インボリュート

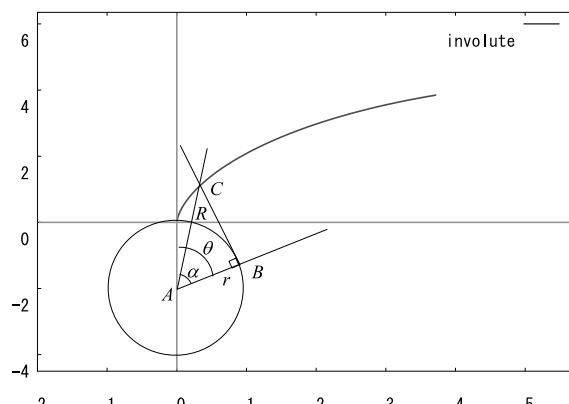


図 10: インボリュート

円のまわりに紐を巻きつけ，その端を持って引っ張りながら紐を巻きほどいていくとき，紐の端の描く軌跡を**インボリュート曲線 (involute)** という．

巻きつける円の半径を r ，角 CAB を θ とするとき，線分 BC の長さは $r\theta$ なので

$$\begin{aligned}\alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{r\theta}{r}\right) \\ &= \tan^{-1}\theta\end{aligned}\tag{147}$$

線分 AC の長さを R とすると

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{(r\theta)^2 + r^2} \\ &= r\sqrt{1 + \theta^2}\end{aligned}\tag{148}$$

ゆえに，インボリュート曲線は

$$\begin{cases} x = R\sin(\theta - \alpha) \\ y = R\cos(\theta - \alpha) - r \end{cases}\tag{149}$$

すなわち

$$\begin{cases} x = r\sqrt{1 + \theta^2}\sin(\theta - \tan^{-1}\theta) \\ y = r\sqrt{1 + \theta^2}\cos(\theta - \tan^{-1}\theta) - r \end{cases}\tag{150}$$

と表すことができる．

また，(150) を点 A を中心として極座標表示すると

$$\begin{cases} R = r\sqrt{1 + \theta^2} \\ \Theta = \theta - \tan^{-1}\theta \end{cases}\tag{151}$$

と表される.

$$\frac{d}{d\theta}(\tan^{-1}\theta) = \frac{1}{1+\theta^2} \quad (152)$$

なので

$$\begin{cases} \frac{dR}{d\theta} = \frac{r\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} \\ \frac{d\Theta}{d\theta} = 1 - \frac{1}{1+\theta^2} = \frac{\theta^2}{1+\theta^2} \end{cases} \quad (153)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2R}{d\theta^2} = \frac{r}{(1+\theta^2)^{3/2}} \\ \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \frac{2\theta}{(1+\theta^2)^2} \end{cases} \quad (154)$$

よってインボリュート曲線の曲率は (153), (154) を極座標の平面曲線の曲率の公式 (52) に代入して

$$k(\theta) = \frac{\theta^6 + 2\theta^4 + \theta^2 - 1}{r\theta^3(\theta^2 + 1)} \quad (155)$$

として求めることができる.

8.2 空間曲線

8.2.1 ・常螺旋（つるまき線）

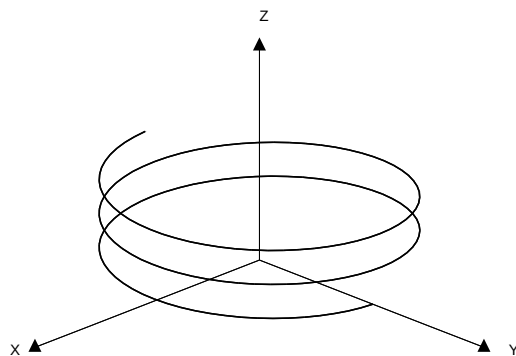


図 11: 常螺旋

半径 a の円柱をツルのように巻いていく空間曲線を**常螺旋 (ordinary helix)** もしくは**つるまき線**という. 常螺旋は $a > 0$, $b > 0$ を用いて

$$\begin{cases} x = acost \\ y = asint \\ z = bt \end{cases} \quad (156)$$

と表すことができる.

$$\begin{cases} \dot{x} = -asint \\ \dot{y} = acost \\ \dot{z} = b \end{cases} \quad (157)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -acost \\ \ddot{y} = -asint \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad (158)$$

$$\begin{cases} x^{(3)} = asint \\ y^{(3)} = -acost \\ z^{(3)} = 0 \end{cases} \quad (159)$$

よって、曲率 κ は (103) より

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (160)$$

捩率 τ は (115) より

$$\tau = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (161)$$

8.2.2 ・円錐螺旋

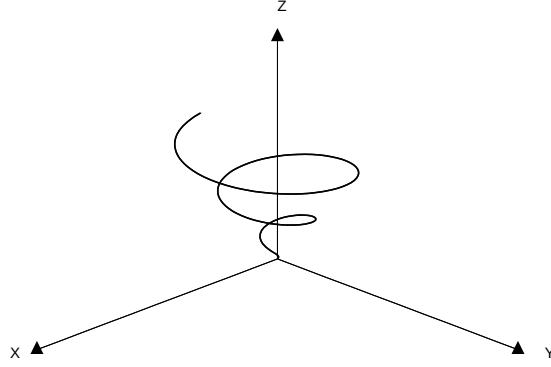


図 12: 円錐螺旋

円錐をツルのように巻いていく空間曲線を**円錐螺旋 (conic helix)** という. 円錐螺旋は $a > 0$, $b \neq 0$ を用いて

$$\begin{cases} x = at \cos t \\ y = at \sin t \\ z = bt \end{cases} \quad (162)$$

と表すことができる.

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cos t - at \sin t \\ \dot{y} = a \sin t + at \cos t \\ \dot{z} = b \end{cases} \quad (163)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a \sin t - a \sin t + at \cos t \\ \quad = -2a \sin t + at \cos t \\ \ddot{y} = a \cos t + a \cos t - at \sin t \\ \quad = 2a \cos t - at \sin t \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad (164)$$

$$\begin{cases} x^{(3)} = -2acost + acost - atsint \\ \quad = -acost - atsint \\ y^{(3)} = -2asint + asint + atcost \\ \quad = -asint + atcost \\ z^{(3)} = 0 \end{cases} \quad (165)$$

故に

$$\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y} = -2abcost - abtsint \quad (166)$$

$$\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z} = -2absint + abtcost \quad (167)$$

$$\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = 2a^2 - a^2t^2 \quad (168)$$

$$(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2 = a^2b^2(4 + t^2) + a^4(2 - t^2)^2 \quad (169)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = a^2(4 + t^2) + b^2 \quad (170)$$

$$x^{(3)}(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y}) + y^{(3)}(\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z}) + z^{(3)}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}) = a^2b(1 + t^2) \quad (171)$$

よって、曲率 κ は (103) より

$$\kappa = \frac{\sqrt{a^2b^2(4 + t^2) + a^4(2 - t^2)^2}}{(a^2(4 + t^2) + b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (172)$$

捩率 τ は (115) より

$$\tau = \frac{a^2b(1 + t^2)}{a^2(4 + t^2) + b^2} \quad (173)$$

参考文献

- [1] 細野忍, 微分幾何, 朝倉書店, 2001
- [2] 劔持勝衛, 曲面論講義, 培風館, 2000
- [3] 小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何, 裳華房, 1998
- [4] 川崎徹郎, 曲面と多様体, 朝倉書店, 2001
- [5] 志賀浩二, 曲面, 岩波書店, 1994
- [6] 日本数学会編, 岩波数学辞典第3版, 岩波書店, 1985
- [7] 東海大学数学教室編, 微分積分学, 東海大学出版会, 1972

更新履歴

更新年月日	版	内容
2005/06/14	初版	
2005/08/10	第 2 版	極座標表示の弧長を追記.
2005/08/16	第 3 版	極座標表示の弧長に極座標の図を追記.
2005/08/26	第 4 版	平面曲線の曲率の節の記述を一部修正. 弧長の曲座標表示の節の記述を一部修正.
2005/08/27	第 5 版	平面曲線の曲率（極座標）の節の記述を一部修正.
2005/08/30	第 6 版	平面曲線の曲率（極座標）の節の記述ミスを修正.
2005/09/01	第 7 版	Frenet 標構の節の座標の図の「Frenet 標構により定義される平面」を修正.
2006/04/22	第 8 版	曲線論・曲面論のまとめから曲線論部分のみ抽出 平面曲線の例の図を修正・追記 平面曲線の例に各平面曲線の曲率の記述を追記
2006/04/28	第 9 版	平面曲線の曲率の記述および Frenet 標構の記述に追記. 空間曲線の曲率の記述を追記
2006/04/29	第 10 版	空間曲線の曲率の記述の誤記を修正
2006/07/26	第 11 版	空間曲線の例の常螺旋，円錐螺旋の記述を追記. Frenet-Serret の公式を用いた曲率・捩率の記述を追記. Frenet 標構の記述に空間曲線の主方向ベクトルの記述を追記.
2007/04/02	第 12 版	平面曲線の例の楕円の曲率の記述ミスを修正.