2006 年 04 月 22 日第 8 版

曲面の定義と例

目 次

1 曲面の定義 **2**

2 曲面の例 **5**

2.1 二次曲面 5

2.1.1 ・楕円面，球面 5

2.1.2 ・一葉双曲面 5

2.1.3 ・ニ葉双曲面 5

2.1.4 ・楕円放物面 6

2.1.5 ・双曲放物面 6

2.1.6 ・楕円錐，円錐 6

2.2 その他の曲面 6

2.2.1 ・輪環面（ドーナツ面） 7

2.2.2 ・柱面 7

2.2.3 ・回転面，擬球面，懸垂面 7

2.2.4 ・正コノイド，常螺旋面 8

1　曲面の定義

平面を曲げた面を考えた場合，曲げる前の平面上の各点と曲げた後の面上の各点は１対１に対応するものと考えられる．

そこで，先ず uv 平面 R^2 の領域 D から空間 E^3 の部分集合への１対１連続写像

$$S : f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \tag{1}$$

を考える．

また，平面の曲げ方として，破いたり折ったりせず，曲げた後の面は十分に滑らかであると考える．すなわち，この写像 S は

$$x(u,v), y(u,v), z(u,v) \text{ は } C^\infty \tag{2}$$

の条件を満たすと考える．

更に曲げた後の面は図１のように接平面を持つことができると考える．

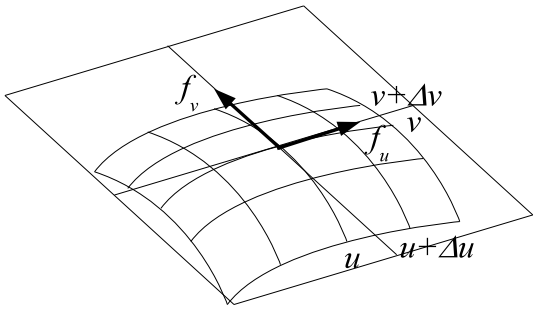

図 1: 接平面

すなわち，接ベクトルを

$$f_u = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} \right) \tag{3}$$

$$f_v = \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \right) \tag{4}$$

と記述するとき

$$\text{接ベクトル } f_u, f_v \text{は一次独立である．} \tag{5}$$

と考える．

（1）によって記述される S が（2），(5）の条件を満たすとき，この S を**曲面片**といい，曲面片の和集合によって記述される面を**曲面**という．

上記の条件（5）は以下の条件１〜４のうち，いずれかを満たせば成立する．

条件 1　一次独立でなければ $f_u \wedge f_v$ は 0 になってしまうので

$$f_u \wedge f_v \neq 0 \tag{6}$$

が成立すれば条件（5）は成立する．

条件 2　一次独立の定義より

$$\mathrm{rank} \begin{bmatrix} f_u \\ f_v \end{bmatrix} \neq 0 \tag{7}$$

が成立すれば条件（5）は成立する．ここで

$$\begin{bmatrix} f_u \\ f_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} \tag{8}$$

は Jacobi（ヤコビ）行列とよばれる．

条件 3　Lagrange（ラグランジュ）の公式

$$\begin{aligned} (w \wedge x) \cdot (y \wedge z) &= (w \cdot y) \cdot (x \cdot z) - (w \cdot z) \cdot (x \cdot y) \\ & \qquad\qquad w, x, y, z \in \mathbf{R}^3 \end{aligned} \tag{9}$$

より

$$|f_u \wedge f_v|^2 = (f_u \cdot f_u) \cdot (f_v \cdot f_v) - (f_u \cdot f_v)^2 \tag{10}$$

故に

$$(f_u \cdot f_u) \cdot (f_v \cdot f_v) - (f_u \cdot f_v)^2 \neq 0 \tag{11}$$

が成立すれば条件（6）が成立するので，条件（5）が成立する．

条件 4

$$\begin{aligned} f_u \wedge f_v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} k \end{aligned} \tag{12}$$

ここで

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \tag{13}$$

なので

$$f_u \wedge f_v = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} i + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} j + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} k \tag{14}$$

故に（13）のうち 1 つでも 0 でなければ（6）が成立し条件（5）は成立する.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \neq 0 \tag{15}$$

は（13）のうち 1 つでも 0 でないことと必要十分条件の関係にあるので（15）が成立すれば条件（5）は成立する.

2　曲面の例

2.1　二次曲面

一般に，2 次式で表される曲面を 2 次曲面という．

2.1.1　・楕円面，球面

a, b, c を正の実数とするとき，原点 O を中心とする**楕円面**は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{16}$$

と記述される．これを

$$\begin{cases} x = a\mathrm{cos}u\mathrm{cos}v \\ y = b\mathrm{cos}u\mathrm{sin}v \\ z = c\mathrm{sin}u \end{cases} \tag{17}$$

のように表示することもできる．

（16）および（17）において $a = b = c$ とすれば**球面**の記述になる．

2.1.2　・一葉双曲面

$a, b, c > 0$ とするとき

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{18}$$

で記述される曲面を**一葉双曲面**という．これは

$$\begin{cases} x = a\mathrm{cosh}u\mathrm{cos}v \\ y = b\mathrm{cosh}u\mathrm{sin}v \\ z = c\mathrm{sinh}u \end{cases} \tag{19}$$

とパラメータ表示することもできる．

2.1.3　・二葉双曲面

$a, b, c > 0$ とするとき

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{20}$$

で記述される曲面を**ニ葉双曲面**という．z 軸＋側に位置する面は

$$\begin{cases} x = a\mathrm{sinh}u\mathrm{cos}v \\ y = b\mathrm{sinh}u\mathrm{sin}v \\ z = c\mathrm{cosh}u \end{cases} \tag{21}$$

z 軸－側に位置する面は

$$\begin{cases} x = a\mathrm{sinh}u\mathrm{cos}v \\ y = b\mathrm{sinh}u\mathrm{sin}v \\ z = -c\mathrm{cosh}u \end{cases} \tag{22}$$

とパラメータ表示することもできる．

2.1.4 ・楕円放物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{23}$$

2.1.5 ・双曲放物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{24}$$

2.1.6 ・楕円錐，円錐

原点 O に頂点を持ち，z 軸を軸とする**直円錐**は

$$x^2 + y^2 = az^2, (a > 0) \tag{25}$$

で表される．

原点 O に頂点を持ち，z 軸を軸とする**楕円錐**は

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = z^2, (a, b > 0) \tag{26}$$

で表される．

2.2 その他の曲面

2 次曲面以外の代表的な曲面の例を以下に示す．

2.2.1 ・輪環面（ドーナツ面）

$0 < a < b$ のとき**輪環面**は

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+z^2=a^2 \tag{27}$$

と表される．また，角度 θ,φ を用いてパラメータ表示すると

$$\begin{cases} x=(a\cos\varphi+b)\cos\theta \\ y=(a\cos\varphi+b)\sin\theta \\ z=a\sin\varphi \end{cases} \tag{28}$$

2.2.2 ・柱面

xy 平面上に曲線

$$\begin{cases} x=x(u) \\ y=y(u) \end{cases} \tag{29}$$

が存在するとき（29）と

$$z=v \tag{30}$$

によって構成される曲面を**柱面**という．

2.2.3 ・回転面，擬球面，懸垂面

xz 平面上に z 軸と交わらない曲線

$$x=f(u), z=g(u) \tag{31}$$

が z 軸を中心に回転して構成される曲面

$$\begin{cases} x=f(u)\cos v \\ y=f(u)\sin v \\ z=g(u) \end{cases} \tag{32}$$

を**回転面**という．

$$\begin{cases} f(u)=\dfrac{1}{c}e^{-cu} \\ g(u)=\pm\displaystyle\int_0^u \sqrt{1-e^{-2ct}}dt \\ \qquad\qquad (0\leq u\leq\infty) \end{cases} \tag{33}$$

のとき，これを**擬球面**といい

$$\begin{cases} f(u)=\sqrt{u^2+a^2} \\ g(u)=\pm a\sinh^{-1}\dfrac{u}{a} \end{cases} \tag{34}$$

のとき，これを**懸垂面**という．

2.2.4 ・正コノイド，常螺旋面

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = f(v) \end{cases} \tag{35}$$

で記述される曲面を**正コノイド**といい，特に

$$f(v) = av + b \tag{36}$$

のとき，これを**常螺旋面**という．

参考文献

[1] 細野忍，微分幾何, 朝倉書店，2001

[2] 劔持勝衛，曲面論講義, 培風館，2000

[3] 小林昭七，曲線と曲面の微分幾何, 裳華房, 1998

[4] 川崎徹郎, 曲面と多様体, 朝倉書店, 2001

[5] 志賀浩二, 曲面, 岩波書店, 1994

[6] 日本数学会編, 岩波数学辞典第３版, 岩波書店, 1985

[7] 東海大学数学教室編, 微分積分学, 東海大学出版会, 1972

更新履歴

更新年月日	版	内容
2005/06/14	初版	
2005/08/10	第 2 版	極座標表示の弧長を追記.
2005/08/16	第 3 版	極座標表示の弧長に極座標の図を追記.
2005/08/26	第 4 版	平面曲線の曲率の節の記述を一部修正. 弧長の曲座標表示の節の記述を一部修正.
2005/08/27	第 5 版	平面曲線の曲率（極座標）の節の記述を一部修正.
2005/08/30	第 6 版	平面曲線の曲率（極座標）の節の記述ミスを修正.
2005/09/01	第 7 版	Frenet 標構の節の座標の図の「Frenet 標構により定義される平面」を修正.
2006/04/22	第 8 版	曲線論・曲面論のまとめから曲面論部分のみ抽出.