

幅を持つ平面曲線の輪郭線の曲率

1 背景と目的

ペンで紙上に記述した曲線をみればわかるように、現実の曲線は幅や太さを持つ。しかし、曲線論では曲線は一般に幅や太さを持たない理想曲線として取り扱われている [1]~[4].

そこで、本稿では幅を持つ平面曲線、その中心線、輪郭線の定義を行い、輪郭線の曲率を中心線の曲率にて表すことを目的とする。

また、例題として円を中心線とする幅を持つ平面曲線の輪郭線の曲率、および楕円を中心線とする幅を持つ平面曲線の輪郭線の曲率を示す。

2 幅を持つ平面曲線、その中心線、輪郭線の定義

直線を曲げた線を考えた場合、曲げる前の直線上の各点と曲げた後の線上の各点は 1 対 1 に対応するものと考えられる。

そこで、先ず実数 R の区間 I から空間 E^2 の部分集合への 1 対 1 連続写像

$$f(t) = (x(t), y(t)), (t \in I) \quad (1)$$

を考える。

直線の曲げ方として、切ったり折ったりせず、曲げた後の線は十分に滑らかであると考え、すなわち

$$x(t), y(t) \text{ は } C^\infty \quad (2)$$

の条件を満たすと考え。

更に、パラメータ t が変化した場合、 $f(t)$ も変化するものとする。すなわち

$$\frac{df(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right) \neq 0 \quad (3)$$

の条件を満たすと考え。

(1) によって記述される $f(t)$ が (2), (3) の条件を満たすとき、この $f(t)$ を平面曲線という。

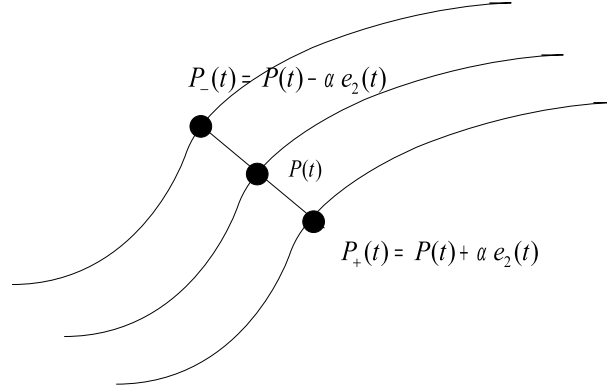


図 1: 中心線と輪郭線

図 1 で表される

$$P(t) = (x(t), y(t)), (t \in I) \quad (4)$$

が条件 (2), (3) を満たすとき $P(t)$ を平面曲線の**中心線**と定義する.

また, 中心線の曲率を κ とするとき, 中心線に対して

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{\kappa} \quad (5)$$

の条件を満たすパラメータ α と主法線ベクトル $e_2(t)$ を用いて記述した

$$P_+(t) = P(t) + \alpha e_2(t) \quad (6)$$

$$P_-(t) = P(t) - \alpha e_2(t) \quad (7)$$

を平面曲線の**輪郭線**と定義する.

3 中心線の曲率を用いた輪郭線の曲率の記述

中心線 $P(t) = (x(t), y(t))$ の曲率 κ は平面曲線の曲率の定義より, 弧長パラメータ s を用いて

$$\kappa = k(s) \cdot e_2 \quad (8)$$

と表すことができる. ただし, 上式の e_2 は主法線ベクトルを表し, $k(s)$ は曲率ベクトルを表す.

同様にして輪郭線 P_+ の曲率 κ_+ を求めるために, 先ず輪郭線 P_+ の曲率ベクトル k_+ を求める. 曲率ベクトルの定義より

$$\begin{aligned}
k_+(s) &= \frac{d^2 P_+}{ds_+^2} \\
&= \frac{d}{ds_+} \left(\frac{ds}{ds_+} \cdot \frac{dP_+}{ds} \right) \\
&= \frac{d^2 s}{ds_+^2} \cdot \frac{dP_+}{ds} + \left(\frac{ds}{ds_+} \right)^2 \cdot \frac{d^2 P_+}{ds^2} \\
&= \frac{d^2 s}{ds_+^2} \cdot \frac{d}{ds} (P + \alpha e_2) + \left(\frac{ds}{ds_+} \right)^2 \cdot \frac{d^2}{ds^2} (P + \alpha e_2) \\
&= \frac{d^2 s}{ds_+^2} \cdot \left(\frac{dP}{ds} + \alpha \frac{de_2}{ds} \right) + \left(\frac{ds}{ds_+} \right)^2 \cdot \left(\frac{d^2 P}{ds^2} + \alpha \frac{d^2 e_2}{ds^2} \right) \tag{9}
\end{aligned}$$

(9) に

$$\frac{dP}{ds} = e_1 \tag{10}$$

$$\frac{de_2}{ds} = -\kappa \cdot e_1 \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 P}{ds^2} &= \frac{de_1}{ds} \\
&= \kappa \cdot e_2 \tag{12}
\end{aligned}$$

を代入して

$$\begin{aligned}
k_+(s) &= \frac{d^2 s}{ds_+^2} \cdot (e_1 - \alpha \kappa e_1) + \left(\frac{ds}{ds_+} \right)^2 \cdot \left(\kappa \cdot e_2 + \alpha \frac{d}{ds} (-\kappa e_1) \right) \\
&= \frac{d^2 s}{ds_+^2} \cdot (1 - \alpha \kappa) \cdot e_1 + \left(\frac{ds}{ds_+} \right)^2 \cdot \left(\kappa \cdot e_2 - \alpha \left(\frac{d\kappa}{ds} \right) e_1 - \alpha \kappa^2 e_2 \right) \tag{13}
\end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned}
\frac{ds_+}{ds} &= \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds_+}{dt} \\
&= \frac{dt}{ds} \cdot \left\| \frac{dP_+}{dt} \right\| \\
&= \frac{dt}{ds} \cdot \left\| \frac{dP}{dt} + \alpha \frac{de_2}{dt} \right\| \\
&= \frac{dt}{ds} \cdot \sqrt{\left\| \frac{dP}{dt} \right\|^2 + 2\alpha \left(\frac{dP}{dt} \frac{de_2}{dt} \right) + \alpha^2 \left\| \frac{de_2}{dt} \right\|^2} \tag{14}
\end{aligned}$$

Frenet-Serret の公式 [2] より

$$\frac{de_2}{ds} = -\kappa e_1 \quad (15)$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{de_2}{dt} &= \frac{ds}{dt} \frac{de_2}{ds} \\ &= -\kappa \left(\frac{ds}{dt} \right) e_1 \end{aligned} \quad (16)$$

また

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{ds}{dt} \frac{dP}{ds} \\ &= \frac{ds}{dt} e_1 \end{aligned} \quad (17)$$

これら (16) , (17) を (14) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{ds_+}{ds} &= \frac{dt}{ds} \cdot \sqrt{\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 - 2\alpha\kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \alpha^2\kappa^2 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2} \\ &= \sqrt{1 - 2\alpha\kappa + \alpha^2\kappa^2} \\ &= \sqrt{(1 - \alpha\kappa)^2} \end{aligned} \quad (18)$$

また, パラメータ α の条件 (5) より

$$1 - \alpha\kappa \geq 0 \quad (19)$$

なので

$$\frac{ds}{ds_+} = \frac{1}{1 - \alpha\kappa} \quad (20)$$

また

$$\begin{aligned} e_{1+} &= \frac{dP_+}{ds_+} \\ &= \frac{ds}{ds_+} \cdot \frac{dP_+}{ds} \\ &= \left(\frac{ds}{ds_+} \right) \cdot \left(\frac{dP}{ds} + \alpha \frac{de_2}{ds} \right) \\ &= \left(\frac{ds}{ds_+} \right) \cdot (e_1 + \alpha (-\kappa e_1)) \end{aligned} \quad (21)$$

(20) を代入して

$$\begin{aligned} e_{1+} &= \left(\frac{1}{1 - \alpha\kappa} \right) \cdot (1 - \alpha\kappa) \cdot e_1 \\ &= e_1 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} e_{2+} &= \frac{\frac{de_{1+}}{ds_+}}{\left\| \frac{de_{1+}}{ds_+} \right\|} \\ &= \frac{\left(\frac{ds}{ds_+} \right) \cdot \frac{de_{1+}}{ds}}{\left(\frac{ds}{ds_+} \right) \cdot \sqrt{\frac{de_{1+}}{ds} \cdot \frac{de_{1+}}{ds}}} \\ &= \frac{\frac{de_{1+}}{ds}}{\left\| \frac{de_{1+}}{ds} \right\|} \end{aligned} \quad (23)$$

(22) より $e_{1+} = e_1$ なので, これを代入して

$$\begin{aligned} e_{2+} &= \frac{\frac{de_1}{ds}}{\left\| \frac{de_1}{ds} \right\|} \\ &= e_2 \end{aligned} \quad (24)$$

よって輪郭線 P_+ の曲率 κ_+ は (13) , (24) より

$$\begin{aligned} \kappa_+ &= k_+ \cdot e_{2+} \\ &= k_+ \cdot e_2 \\ &= \left(\frac{ds}{ds_+} \right)^2 \cdot (\kappa - \alpha\kappa^2) \end{aligned} \quad (25)$$

として求めることができる.

これに (20) を代入して, 輪郭線 P_+ の曲率 κ_+ は

$$\begin{aligned} \kappa_+ &= \left(\frac{1}{1 - \alpha\kappa} \right)^2 \cdot (\kappa - \alpha\kappa^2) \\ &= \frac{\kappa}{1 - \alpha\kappa} \end{aligned} \quad (26)$$

として記述できる.

同様に輪郭線 P_- の曲率 κ_- は

$$\kappa_- = \frac{\kappa}{1 + \alpha\kappa} \quad (27)$$

として記述できる.

(26), (27) を合わせて

$$\kappa_{\pm} = \frac{\kappa}{1 \mp \alpha\kappa} \quad (28)$$

すなわち

$$\frac{1}{\kappa_{\pm}} = \frac{1}{\kappa} \mp \alpha \quad (29)$$

と表現できる.

これは輪郭線 $P_{\pm}$ の曲率半径 $1/\kappa_{\pm}$ が中心線の曲率半径 $1/\kappa$ に $\mp\alpha$ 加算したものであることを示している.

4 例題 1 円を中心線とする幅を持つ曲線の輪郭線の曲率の記述

中心線を半径 r の円とする幅 2α の輪郭線を求める.

半径 r の円の曲率 κ は

$$\kappa = \frac{1}{r} \quad (30)$$

よって中心線を半径 r の円とする幅 2α の輪郭線の曲率 $\kappa_{\pm}$ は (30) を (28) に代入して

$$\kappa_{\pm} = \frac{\kappa}{1 \mp \alpha\kappa} = \frac{1}{r \mp \alpha} \quad (31)$$

として求まる.

5 例題 2 楕円を中心線とする幅を持つ曲線の輪郭線の曲率の記述

a, b を正の実数とすると、原点を中心とする楕円

$$P \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (32)$$

を中心線とする幅 2α の輪郭線

$$P_{\pm} \begin{cases} x_{\pm} = (a \mp \alpha) \cos t \\ y_{\pm} = (b \mp \alpha) \sin t \end{cases} \quad (33)$$

の曲率 $\kappa_{\pm}$ を求める.

中心線の楕円 (32) の曲率 κ は

$$\kappa = \frac{ab}{\left(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t\right)^{3/2}} \quad (34)$$

よって楕円 (32) を中心線とする幅 2α の輪郭線の曲率 $\kappa_{\pm}$ は (34) を (28) に代入して

$$\begin{aligned} \kappa_{\pm} &= \frac{\kappa}{1 \mp \alpha \kappa} \\ &= \frac{ab}{\left(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t\right)^{3/2} \mp \alpha ab} \end{aligned} \quad (35)$$

として求められる.

ちなみに (35) に対して $a = b = r$ を代入すると

$$\begin{aligned} \kappa_{\pm} &= \frac{r^2}{r^3 \mp \alpha r^2} \\ &= \frac{1}{r \mp \alpha} \end{aligned} \quad (36)$$

となり (31) と一致する.

6 まとめ

幅を持つ平面曲線として, その中心線, 輪郭線の定義を行い, 輪郭線の曲率を中心線の曲率を用いて表すことができた.

また, 例題として幅を持つ円に対する中心線の曲率を用いた輪郭線の曲率, および幅を持つ楕円に対する中心線の曲率を用いた輪郭線の曲率を示した.

7 付録1 中心線の曲率を用いた輪郭線の曲率の導出に関する補足

輪郭線 P_+ の曲率 κ_+ (26) は (25) のように e_{2+} を求めて

$$\kappa_+ = k_+ \cdot e_{2+} \quad (37)$$

として求めなくても、曲率の定義から

$$\kappa_+ = ||k_+|| \quad (38)$$

として以下のように求めてもよい.

(20) より

$$\left(\frac{ds}{ds_+} \right)^2 = \frac{1}{(1 - \alpha\kappa)^2} \quad (39)$$

両辺を微分して

$$2 \cdot \left(\frac{ds}{ds_+} \right) \cdot \frac{d^2s}{ds_+^2} = \frac{-2}{(1 - \alpha\kappa)^3} \cdot \left(-\alpha \frac{d\kappa}{ds} \right) \cdot \left(\frac{ds}{ds_+} \right) \quad (40)$$

よって

$$\frac{d^2s}{ds_+^2} = \frac{\alpha \cdot \left(\frac{d\kappa}{ds} \right)}{(1 - \alpha\kappa)^3} \quad (41)$$

(39) と (41) を (13) に代入して

$$\begin{aligned} k_+ &= \frac{\alpha \cdot \left(\frac{d\kappa}{ds} \right)}{(1 - \alpha\kappa)^3} \cdot (1 - \alpha\kappa) \cdot e_1 + \frac{1}{(1 - \alpha\kappa)^2} \cdot \left(-\alpha \left(\frac{d\kappa}{ds} \right) e_1 + (\kappa - \alpha\kappa^2) e_2 \right) \\ &= \frac{\kappa}{1 - \alpha\kappa} \cdot e_2 \end{aligned} \quad (42)$$

よって

$$\begin{aligned} \kappa_+ &= ||k_+|| \\ &= \frac{\kappa}{1 - \alpha\kappa} \end{aligned} \quad (43)$$

参考文献

- [1] 細野忍, 微分幾何, 朝倉書店, 2001
- [2] 小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何, 裳華房, 1998
- [3] 川崎徹郎, 曲面と多様体, 朝倉書店, 2001
- [4] 志賀浩二, 曲面, 岩波書店, 1994

更新履歴

更新年月日	版	内容
2007/07/20	初版	
2007/09/02	第 2 版	e_{2+} と e_2 が一致する旨の部分の記述を修正. パラメータ α の条件を修正.
2007/09/11	第 3 版	輪郭線の曲率の導出方法についての補足を付録 1 として追加.