太さを持つ空間曲線の輪郭線の曲率と捩率

Abstruct

1　背景と目的

文献 [1] にて幅を持つ平面曲線と，その中心線，輪郭線の定義を行い，輪郭線の曲率を中心線の曲率を用いて表した.

本稿では，太さを持つ空間曲線，その中心線，輪郭線の定義を行い，輪郭線の曲率および捩率を, 中心線の曲率および捩率を用いて表すことを目的とする.

また，例題として円を中心線とする太さを持つ空間曲線の輪郭線の曲率および捩率，および常螺旋を中心線とする太さを持つ空間曲線の輪郭線の曲率および捩率を示す.

2　太さを持つ空間曲線，その中心線，輪郭線の定義

直線を曲げた線を考えた場合，曲げる前の直線上の各点と曲げた後の線上の各点は 1 対 1 に対応するものと考えられる.

そこで，先ず実数 R の区間 I から空間 E^3 の部分集合への 1 対 1 連続写像

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)), (t \in I) \tag{1}$$

を考える.

直線の曲げ方として，切ったり折ったりせず，曲げた後の線は十分に滑らかであると考える．すなわち

$$x(t), y(t), z(t) \text{ は } C^\infty \tag{2}$$

の条件を満たすと考える.

更に，パラメータ t が変化した場合，$f(t)$ も変化するものとする．すなわち

$$\frac{df(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right) \neq 0 \tag{3}$$

の条件を満たすと考える.

(1) によって記述される $f(t)$ が (2) , (3) の条件を満たすとき，この $f(t)$ を**空間曲線**という.

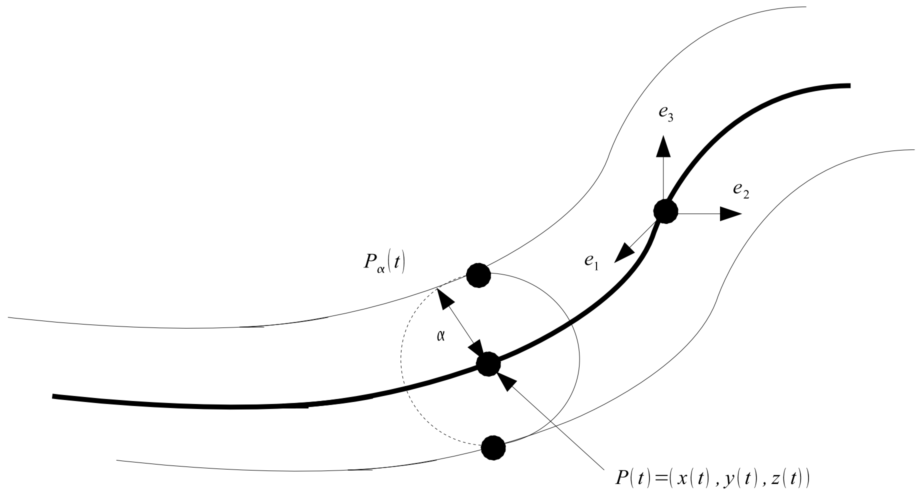

図 1: 中心線と輪郭線

図 1 で表される

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)), (t{\in}I) \tag{4}$$

が条件（2）, (3）を満たすとき $P(t)$ を空間曲線の**中心線**と定義する.

また，中心線に対してパラメータ $\alpha\,(>0)$ と主法線ベクトル $e_2(t)$ および従法線ベクトル $e_3(t)$ を用いて記述した

$$P_\alpha(t) = P(t) + (\alpha cos\theta)\, e_2(t) + (\alpha sin\theta)\, e_3(t) \tag{5}$$

を空間曲線の**輪郭線**と定義する.

3 中心線の曲率，捩率を用いた輪郭線の曲率

中心線 $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ の曲率 κ および捩率 τ を用いて，輪郭線 $P_\alpha(t)$ の曲率 κ_α を求める.

$$P_w(t) = (\alpha cos\theta)\, e_2(t) + (\alpha sin\theta)\, e_3(t) \tag{6}$$

と定義すると輪郭線 $P_\alpha(t)$ は

$$P_\alpha(t) = P(t) + P_w(t) \tag{7}$$

と表すことができる.

輪郭線の接線ベクトルを $e_{1\alpha}$，主法線ベクトルを $e_{2\alpha}$，従法線ベクトルを $e_{3\alpha}$ とすると，定義より

$$\frac{dP_\alpha}{ds_\alpha} = e_{1\alpha} \tag{8}$$

$$\frac{d^2P_\alpha}{ds_\alpha^2} = \kappa_\alpha e_{2\alpha} \tag{9}$$

ここで

$$\frac{dP_\alpha}{ds_\alpha} \times \frac{d^2P_\alpha}{ds_\alpha^2} = \kappa_\alpha e_{3\alpha} \tag{10}$$

より輪郭線の曲率 κ_α は

$$\kappa_\alpha = \left\| \frac{dP_\alpha}{ds_\alpha} \times \frac{d^2P_\alpha}{ds_\alpha^2} \right\| \tag{11}$$

として求められる．

$$\frac{dP_\alpha}{ds_\alpha} = \frac{ds}{ds_\alpha} \cdot \frac{dP_\alpha}{ds} \tag{12}$$

$$\frac{d^2P_\alpha}{ds_\alpha^2} = \frac{d^2s}{ds_\alpha^2} \cdot \frac{dP_\alpha}{ds} + \left(\frac{ds}{ds_\alpha} \right)^2 \cdot \frac{d^2P_\alpha}{ds^2} \tag{13}$$

より

$$\frac{dP_\alpha}{ds_\alpha} \times \frac{d^2P_\alpha}{ds_\alpha^2} = \left(\frac{ds}{ds_\alpha} \right)^3 \cdot \left(\frac{dP_\alpha}{ds} \times \frac{d^2P_\alpha}{ds^2} \right) \tag{14}$$

よって（11）より

$$\kappa_\alpha = \left(\frac{ds}{ds_\alpha} \right)^3 \cdot \left\| \frac{dP_\alpha}{ds} \times \frac{d^2P_\alpha}{ds^2} \right\| \tag{15}$$

（12）より

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{ds_\alpha} \right)^2 &= \left\| \frac{dP_\alpha}{ds_\alpha} \right\|^2 \cdot \left\| \frac{dP_\alpha}{ds} \right\|^{-2} \\ &= \left\| \frac{dP_\alpha}{ds} \right\|^{-2} \end{aligned} \tag{16}$$

すなわち

$$\left(\frac{ds}{ds_\alpha} \right)^3 = \left\| \frac{dP_\alpha}{ds} \right\|^{-3} \tag{17}$$

したがって（15）に（17）を代入して

$$\kappa_\alpha = \frac{\left\| \frac{dP_\alpha}{ds} \times \frac{d^2P_\alpha}{ds^2} \right\|}{\left\| \frac{dP_\alpha}{ds} \right\|^3} \tag{18}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_\alpha}{ds} &= \frac{dP}{ds} + \frac{dP_w}{ds} \\
&= e_1 + \alpha\mathrm{cos}\theta\left(-\kappa e_1 + \tau e_3\right) + \alpha\mathrm{sin}\theta\left(-\tau e_2\right) \\
&= \left(1 - \alpha\kappa\mathrm{cos}\theta\right) e_1 - \tau\alpha\mathrm{sin}\theta e_2 + \alpha\tau\mathrm{cos}\theta e_3 \qquad (19)
\end{aligned}
$$

$$
\left\|\frac{dP_\alpha}{ds}\right\| = \left(\left(1 - \alpha\kappa\mathrm{cos}\theta\right)^2 - \alpha^2\tau^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (20)
$$

また

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2P_\alpha}{ds^2} &= -\alpha\mathrm{cos}\theta\frac{d\kappa}{ds}e_1 + \left(1 - \alpha\kappa\mathrm{cos}\theta\right)\kappa e_2 \\
&\quad -\alpha\mathrm{sin}\theta\frac{d\tau}{ds}e_2 - \alpha\tau\mathrm{sin}\theta\left(-\kappa e_1 + \tau e_3\right) \\
&\quad +\alpha\mathrm{cos}\theta\frac{d\tau}{ds}e_3 + \alpha\tau\mathrm{cos}\theta\left(-\tau e_2\right) \\
&= \left(-\alpha\mathrm{cos}\theta\frac{d\kappa}{ds} + \alpha\kappa\tau\mathrm{sin}\theta\right)e_1 \\
&\quad + \left(\kappa - \alpha\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\mathrm{cos}\theta - \alpha\mathrm{sin}\theta\frac{d\tau}{ds}\right)e_2 \\
&\quad + \left(\alpha\mathrm{cos}\theta\frac{d\tau}{ds} - \alpha\tau^2\mathrm{sin}\theta\right)e_3 \qquad (21)
\end{aligned}
$$

よって（19）と（21）より

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_\alpha}{ds}\times\frac{d^2P_\alpha}{ds^2} &= \begin{vmatrix} -\tau\alpha\mathrm{sin}\theta & \alpha\tau\mathrm{cos}\theta \\ \kappa - \alpha\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\mathrm{cos}\theta - \alpha\mathrm{sin}\theta\frac{d\tau}{ds} & \alpha\mathrm{cos}\theta\frac{d\tau}{ds} - \alpha\tau^2\mathrm{sin}\theta \end{vmatrix} e_1 \\
&+ \begin{vmatrix} \alpha\tau\mathrm{cos}\theta & 1 - \alpha\kappa\mathrm{cos}\theta \\ \alpha\mathrm{cos}\theta\frac{d\tau}{ds} - \alpha\tau^2\mathrm{sin}\theta & -\alpha\mathrm{cos}\theta\frac{d\kappa}{ds} + \alpha\kappa\tau\mathrm{sin}\theta \end{vmatrix} e_2 \\
&+ \begin{vmatrix} 1 - \alpha\kappa\mathrm{cos}\theta & -\tau\alpha\mathrm{sin}\theta \\ -\alpha\mathrm{cos}\theta\frac{d\kappa}{ds} + \alpha\kappa\tau\mathrm{sin}\theta & \kappa - \alpha\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\mathrm{cos}\theta - \alpha\mathrm{sin}\theta\frac{d\tau}{ds} \end{vmatrix} e_3 \\
&= \alpha\tau\begin{vmatrix} -\mathrm{sin}\theta & \mathrm{cos}\theta \\ \kappa - \alpha\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\mathrm{cos}\theta & -\alpha\tau^2\mathrm{sin}\theta \end{vmatrix} e_1 \\
&+ \alpha\begin{vmatrix} \tau\mathrm{cos}\theta & 1 - \alpha\kappa\mathrm{cos}\theta \\ \mathrm{cos}\theta\frac{d\tau}{ds} - \tau^2\mathrm{sin}\theta & -\alpha\mathrm{cos}\theta\frac{d\kappa}{ds} + \alpha\kappa\tau\mathrm{sin}\theta \end{vmatrix} e_2 \\
&+ \begin{vmatrix} 1 - \alpha\kappa\mathrm{cos}\theta & -\tau\alpha\mathrm{sin}\theta \\ -\alpha\mathrm{cos}\theta\frac{d\kappa}{ds} + \alpha\kappa\tau\mathrm{sin}\theta & \kappa - \alpha\left(\kappa^2 + \tau^2\right)\mathrm{cos}\theta - \alpha\mathrm{sin}\theta\frac{d\tau}{ds} \end{vmatrix} e_3 \qquad (22)
\end{aligned}
$$

したがって（18）に（20）と（22）を代入して

$$\kappa_\alpha = \sqrt{\frac{\left(\begin{array}{l} \alpha^2\tau^2 \begin{vmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \kappa - \alpha\left(\kappa^2+\tau^2\right)\cos\theta & -\alpha\tau^2\sin\theta \end{vmatrix}^2 \\ +\alpha^2 \begin{vmatrix} \tau\cos\theta & 1-\alpha\kappa\cos\theta \\ \cos\theta\frac{d\tau}{ds} - \tau^2\sin\theta & -\alpha\cos\theta\frac{d\kappa}{ds} + \alpha\kappa\tau\sin\theta \end{vmatrix}^2 \\ + \begin{vmatrix} 1-\alpha\kappa\cos\theta & -\tau\alpha\sin\theta \\ -\alpha\cos\theta\frac{d\kappa}{ds} + \alpha\kappa\tau\sin\theta & \kappa - \alpha\left(\kappa^2+\tau^2\right)\cos\theta - \alpha\sin\theta\frac{d\tau}{ds} \end{vmatrix}^2 \end{array}\right)}{\left((1-\alpha\kappa\cos\theta)^2 - \alpha^2\tau^2\right)^3}} \tag{23}$$

$\tau\equiv 0$ のとき（23）は

$$\kappa_\alpha = \frac{\kappa}{1-\alpha\kappa\cos\theta} \tag{24}$$

4 中心線の曲率，捩率を用いた輪郭線の捩率

中心線 $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ の曲率 κ および捩率 τ を用いて，輪郭線 $P_\alpha(t)$ の捩率 τ_α を求める．

（9）の両辺を s_α で微分して

$$\begin{aligned} \frac{d^3P_\alpha}{ds_\alpha^3} &= \frac{d\kappa_\alpha}{ds}e_{2\alpha} + \kappa_\alpha\frac{de_{2\alpha}}{ds} \\ &= -{\kappa_\alpha}^2 e_{1\alpha} + \frac{d\kappa_\alpha}{ds}e_{2\alpha} + \kappa_\alpha\tau_\alpha e_{3\alpha} \end{aligned} \tag{25}$$

これに（10）の両辺をかけて

$$\frac{d^3P_\alpha}{ds_\alpha^3}\cdot\left(\frac{dP_\alpha}{ds_\alpha}\times\frac{d^2P_\alpha}{ds_\alpha^2}\right) = {\kappa_\alpha}^2\tau_\alpha \tag{26}$$

よって

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{\frac{d^3P_\alpha}{ds_\alpha^3}\cdot\left(\frac{dP_\alpha}{ds_\alpha}\times\frac{d^2P_\alpha}{ds_\alpha^2}\right)}{{\kappa_\alpha}^2} \\ &= \frac{\frac{d^3P_\alpha}{ds_\alpha^3}\cdot\left(\frac{dP_\alpha}{ds_\alpha}\times\frac{d^2P_\alpha}{ds_\alpha^2}\right)}{\left\|\frac{dP_\alpha}{ds_\alpha}\times\frac{d^2P_\alpha}{ds_\alpha^2}\right\|^2} \end{aligned} \tag{27}$$

ここで (13) より

$$\frac{d^3P_\alpha}{ds_\alpha^3} = \frac{d^3s}{ds_\alpha^3}\cdot\frac{dP_\alpha}{ds} + \frac{d^2s}{ds_\alpha^2}\cdot\frac{ds}{ds_\alpha}\cdot\frac{d^2P_\alpha}{ds^2} + 2\left(\frac{ds}{ds_\alpha}\right)\left(\frac{d^2s}{ds_\alpha^2}\right)\cdot\frac{d^2P_\alpha}{ds^2} + \left(\frac{ds}{ds_\alpha}\right)^3\cdot\frac{d^3P_\alpha}{ds^3} \tag{28}$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{d^3P_\alpha}{ds_\alpha^3}\cdot\left(\frac{dP_\alpha}{ds_\alpha}\times\frac{d^2P_\alpha}{ds_\alpha^2}\right) &= \left(\frac{d^3P_\alpha}{ds_\alpha^3}\right)\cdot\left(\frac{ds}{ds_\alpha}\right)^3\cdot\left(\frac{dP_\alpha}{ds}\times\frac{d^2P_\alpha}{ds^2}\right) \\
&= \left(\frac{ds}{ds_\alpha}\right)^6\cdot\left(\frac{d^3P_\alpha}{ds^3}\right)\cdot\left(\frac{dP_\alpha}{ds}\times\frac{d^2P_\alpha}{ds^2}\right) \\
&= \left(\frac{ds}{ds_\alpha}\right)^6\cdot\left[\frac{d^3P_\alpha}{ds^3},\frac{dP_\alpha}{ds},\frac{d^2P_\alpha}{ds^2}\right] \qquad (29)
\end{aligned}$$

(27) に (14) と (29) を代入して

$$\begin{aligned}
\tau_\alpha &= \frac{\left(\dfrac{ds}{ds_\alpha}\right)^6\left[\dfrac{d^3P_\alpha}{ds^3},\dfrac{dP_\alpha}{ds},\dfrac{d^2P_\alpha}{ds^2}\right]}{\left(\dfrac{ds}{ds_\alpha}\right)^6\left\|\dfrac{dP_\alpha}{ds}\times\dfrac{d^2P_\alpha}{ds^2}\right\|^2} \\
&= \frac{\left[\dfrac{d^3P_\alpha}{ds^3},\dfrac{dP_\alpha}{ds},\dfrac{d^2P_\alpha}{ds^2}\right]}{\left\|\dfrac{dP_\alpha}{ds}\times\dfrac{d^2P_\alpha}{ds^2}\right\|^2} \qquad (30)
\end{aligned}$$

スカラー三重積の公式より

$$\left[\frac{d^3P_\alpha}{ds^3},\frac{dP_\alpha}{ds},\frac{d^2P_\alpha}{ds^2}\right] = \begin{vmatrix} \dfrac{d^3P_\alpha}{ds^3}\cdot e_1 & \dfrac{d^3P_\alpha}{ds^3}\cdot e_2 & \dfrac{d^3P_\alpha}{ds^3}\cdot e_3 \\ \dfrac{dP_\alpha}{ds}\cdot e_1 & \dfrac{dP_\alpha}{ds}\cdot e_2 & \dfrac{dP_\alpha}{ds}\cdot e_3 \\ \dfrac{d^2P_\alpha}{ds^2}\cdot e_1 & \dfrac{d^2P_\alpha}{ds^2}\cdot e_2 & \dfrac{d^2P_\alpha}{ds^2}\cdot e_3 \end{vmatrix} \qquad (31)$$

なので（30）は

$$\tau_\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{d^3P_\alpha}{ds^3}\cdot e_1 & \dfrac{d^3P_\alpha}{ds^3}\cdot e_2 & \dfrac{d^3P_\alpha}{ds^3}\cdot e_3 \\ \dfrac{dP_\alpha}{ds}\cdot e_1 & \dfrac{dP_\alpha}{ds}\cdot e_2 & \dfrac{dP_\alpha}{ds}\cdot e_3 \\ \dfrac{d^2P_\alpha}{ds^2}\cdot e_1 & \dfrac{d^2P_\alpha}{ds^2}\cdot e_2 & \dfrac{d^2P_\alpha}{ds^2}\cdot e_3 \end{vmatrix}}{\left\|\dfrac{dP_\alpha}{ds}\times\dfrac{d^2P_\alpha}{ds^2}\right\|^2} \qquad (32)$$

と記述することもできる.

（21）の両辺を s で微分して

$$
\begin{aligned}
\frac{d^3P_\alpha}{ds^3} &= \frac{d}{ds}\left(-\alpha\cos\theta\frac{d\kappa}{ds}+\alpha\kappa\tau\sin\theta\right)e_1+\left(-\alpha\cos\theta\frac{d\kappa}{ds}+\alpha\kappa\tau\sin\theta\right)\frac{de_1}{ds} \\
&\quad +\frac{d}{ds}\left(\kappa-\alpha\left(\kappa^2+\tau^2\right)\cos\theta-\alpha\sin\theta\frac{d\tau}{ds}\right)e_2+\left(\kappa-\alpha\left(\kappa^2+\tau^2\right)\cos\theta-\alpha\sin\theta\frac{d\tau}{ds}\right)\frac{de_2}{ds} \\
&\quad +\frac{d}{ds}\left(\alpha\cos\theta\frac{d\tau}{ds}-\alpha\tau^2\sin\theta\right)e_3+\left(\alpha\cos\theta\frac{d\tau}{ds}-\alpha\tau^2\sin\theta\right)\frac{de_3}{ds} \\
&= \left(-\alpha\cos\theta\frac{d^2\kappa}{ds^2}+\alpha\left(\frac{d\kappa}{ds}\tau+\kappa\frac{d\tau}{ds}\right)\sin\theta\right)e_1+\left(-\alpha\cos\theta\frac{d\kappa}{ds}+\alpha\kappa\tau\sin\theta\right)\kappa e_2 \\
&\quad +\left(\frac{d\kappa}{ds}-\alpha\left(2\kappa\frac{d\kappa}{ds}+2\tau\frac{d^2\tau}{ds^2}\right)\cos\theta-\alpha\sin\theta\frac{d\tau}{ds}\right)e_2 \\
&\quad +\left(\kappa-\alpha\left(\kappa^2+\tau^2\right)\cos\theta-\alpha\sin\theta\frac{d\tau}{ds}\right)(-\kappa e_1+\tau e_3) \\
&\quad +\left(\alpha\cos\theta\frac{d^2\tau}{ds^2}-\alpha 2\tau\frac{d\tau}{ds}\sin\theta\right)e_3-\left(\alpha\cos\theta\frac{d\tau}{ds}-\alpha\tau^2\sin\theta\right)\tau e_2 \\
&= \left(\left(-\alpha\cos\theta\frac{d^2\kappa}{ds^2}+\alpha\left(\frac{d\kappa}{ds}\tau+2\kappa\frac{d\tau}{ds}\right)\sin\theta\right)-\kappa\left(\kappa-\alpha\left(\kappa^2+\tau^2\right)\cos\theta\right)\right)e_1 \\
&\quad +\left(\left(-\alpha\cos\theta\frac{d\kappa}{ds}+\alpha\kappa\tau\sin\theta\right)\kappa+\frac{d\kappa}{ds}-\alpha\left(2\kappa\frac{d\kappa}{ds}+2\tau\frac{d^2\tau}{ds^2}\right)\cos\theta-\alpha\sin\theta\frac{d\tau}{ds}\right. \\
&\quad \left.-\left(\alpha\cos\theta\frac{d\tau}{ds}-\alpha\tau^2\sin\theta\right)\tau\right)e_2 \\
&\quad +\left(\left(\kappa-\alpha\left(\kappa^2+\tau^2\right)\cos\theta\right)\tau+\left(\alpha\cos\theta\frac{d^2\tau}{ds^2}-3\alpha\tau\frac{d\tau}{ds}\sin\theta\right)\right)e_3 \qquad (33)
\end{aligned}
$$

よって（19），(21），(33）を（32）に代入して

$$
\tau_\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha\cos\theta\frac{d^2\kappa}{ds^2} \\ +\alpha\left(\frac{d\kappa}{ds}\tau + 2\kappa\frac{d\tau}{ds}\right)\sin\theta \\ -\kappa\left(\kappa - \alpha\left(\kappa^2+\tau^2\right)\cos\theta\right) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha\left(-\cos\theta\frac{d\kappa}{ds}\right. \\ \left.+\kappa\tau\sin\theta\right)\kappa \\ +\frac{d\kappa}{ds} \\ -\alpha\left(2\kappa\frac{d\kappa}{ds}\right. \\ \left.+2\tau\frac{d^2\tau}{ds^2}\right)\cos\theta \\ -\alpha\sin\theta\frac{d\tau}{ds} \\ -\alpha\left(\cos\theta\frac{d\tau}{ds}\right. \\ \left.-\tau^2\sin\theta\right)\tau \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \left(\kappa - \alpha\left(\kappa^2+\tau^2\right)\cos\theta\right)\tau \\ +\alpha\cos\theta\frac{d^2\tau}{ds^2} \\ -3\alpha\tau\frac{d\tau}{ds}\sin\theta \end{pmatrix} \\ (1-\alpha\kappa\cos\theta) & -\tau\alpha\sin\theta & \alpha\tau\cos\theta \\ \left(-\alpha\cos\theta\frac{d\kappa}{ds} + \alpha\kappa\tau\sin\theta\right) & \begin{pmatrix} \kappa - \alpha\left(\kappa^2+\tau^2\right)\cos\theta \\ -\alpha\sin\theta\frac{d\tau}{ds} \end{pmatrix} & \left(\alpha\cos\theta\frac{d\tau}{ds} - \alpha\tau^2\sin\theta\right) \end{vmatrix}}{\begin{pmatrix} \alpha^2\tau^2\begin{vmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \kappa - \alpha\left(\kappa^2+\tau^2\right)\cos\theta & -\alpha\tau^2\sin\theta \end{vmatrix}^2 \\ +\alpha^2\begin{vmatrix} \tau\cos\theta & 1-\alpha\kappa\cos\theta \\ \cos\theta\frac{d\tau}{ds} - \tau^2\sin\theta & -\alpha\cos\theta\frac{d\kappa}{ds} + \alpha\kappa\tau\sin\theta \end{vmatrix}^2 \\ +\begin{vmatrix} 1-\alpha\kappa\cos\theta & -\tau\alpha\sin\theta \\ -\alpha\cos\theta\frac{d\kappa}{ds} + \alpha\kappa\tau\sin\theta & \kappa - \alpha\left(\kappa^2+\tau^2\right)\cos\theta - \alpha\sin\theta\frac{d\tau}{ds} \end{vmatrix}^2 \end{pmatrix}} \tag{34}
$$

$\tau\equiv0$ のとき（34）は

$$\tau_\alpha = 0 \tag{35}$$

5　例題１　円を中心線とする輪郭線の曲率および振率

半径 r の円を中心線とする太さ α の空間曲線の輪郭線の曲率 κ_α および振率 τ_α は (24），(35）より

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{r - \alpha\cos\theta} \tag{36}$$

$$\tau_\alpha = 0 \tag{37}$$

6　まとめ

文献 [1] にて幅を持つ平面曲線の輪郭線の曲率を求めたときは，直感的にも数式的にも簡潔な記述とすることができたが，空間曲線となり振率を考慮した途端に複雑なものとなってしまった.

参考文献

[1] ，幅を持つ平面曲線の輪郭線の曲率，2007

[2] 山内，詳細演習ベクトル解析，培風館，1988

更新履歴

更新年月日	版	内容
2008/09/01	初版	